1 EU-Projekt mit M@th Desktop, basierend auf Mathematica

Dr. Reinhard Simonovits

HAK Grazbachgasse, Grazbachgasse 71, 8010 Graz

Email: Reinhard.Simonovits@uni-graz.at

Die Unterrichtssoftware M@th Desktop ist Grundlage für ein EU-Projekt in Mathematik: Mathematics and Web: Modern Tools for Understanding. An diesem Projekt nehmen Schulen (Gymnasien, Realgymnasien, HAK's) in Österreich, Spanien und Deutschland teil. Die Schüler arbeiten mit M@th Desktop und Mathematica an folgenden Projekten: Krümmung von Autobahnauffahrten, Vermeidung von Unfällen an Ampelkreuzungen, Kostensimulation der Waffelfabrik, Analyse eines Federballfluges, Stefan Boltzmann Gesetz, die faszinierende Welt von Evoluten und Kurven in Polarkoordinaten, experimentelles Wachstum, logistische Modelle in Biologie, Physik und Medizin, Taylor Polynome und Qualität der Approximation.

In diesem Vortrag möchte ich über den Aufbau dieser auf Paletten und Arbeitsblättern basierenden Unterrichtssoftware eingehen. Die didaktischen Grundsätze, die zum Design dieser Software beigetragen haben, werden erläutert.

Eine Demoversion von M@th Desktop ist von **http://www.deltasoft.at** runterladbar.

Mittlerweile erstellen Diplomanden und Dissertanden am Institut unter Leitung von Univ.Prof.Dr. Bernd Thaller am Institut für Mathematik der Uni Graz und Univ.Prof.Dr. Karl Fuchs vom Institut für Mathematik der Universität Salzburg mit dem Entwicklungstool von M@th Desktop Lerneinheiten und Paletten auf dem Gebiet der Differenzial- und Integralrechnung.

Die Diplomarbeiten von Mag. Rainer Fink und Mag. Hans-Stefan Siller sind unter

http://www.kfunigraz.ac.at/imawww/diplomarbeiten/index.html

als pdf-Files runterladbar.

Im folgenden zitiere ich nun aus der Diplomarbeit von Hans-Stefan Siller. [siller02]

2 Entwicklung von Unterrichtseinheiten zur Differentialrechnung mit der Software M@th Desktop

2.1 Beschreibung der Software

Der Beweggrund der Autoren von M@th Desktop ist, eine moderne, interaktive, netzwerkfähige Unterrichts -und Lernsoftware für AHS, BHS und Fachhochschulen zu entwickeln, die dem Benutzer bilingual, also in Englisch und Deutsch, vorliegt.

Die Idee, M@th Desktop nach den bewährten fundamentalen Konzepten und Ideen des Mathematikunterrichts zu designen und Arbeitsblätter mit Paletten zu verwenden stammt von Dr. Reinhard Simonovits [simonovi]. Die Software sollte als begleitendes Programm für den Unterricht dienen. Das Programm baut auf *Mathematica* auf. So ist es auch nicht verwunderlich, dass das Arbeiten über Paletten geschieht, die von Arbeitsblättern unterstützt werden. Die Arbeitsblätter sind so gestaltet, dass der Benutzer Text, Rechnungen, Graphiken und Internetlinks verwenden und auch selbst erstellen kann. Auch kann der User, das sind Lehrer und Schüler, eigene Paletten und Arbeitsblätter selber erzeugen.

M@th Desktop besitzt einen modulartigen Aufbau. Alle Module sind vom selben Grundgedanken geleitet und beinhalten ähnliche Bedienungselemente. In der Endversion wird M@th Desktop aus sechs Modulen bestehen:

- Differenziationsmodul
- Integrationsmodul
- Statistikmodul
- Funktionenmodul
- Finanzmodul
- Lineare Algebra Modul

Um die Software übersichtlich zu gestalten ist jeder Modul in

- Kernbereich
- Erweiterungsbereich
- mathematische Projekte

gegliedert.

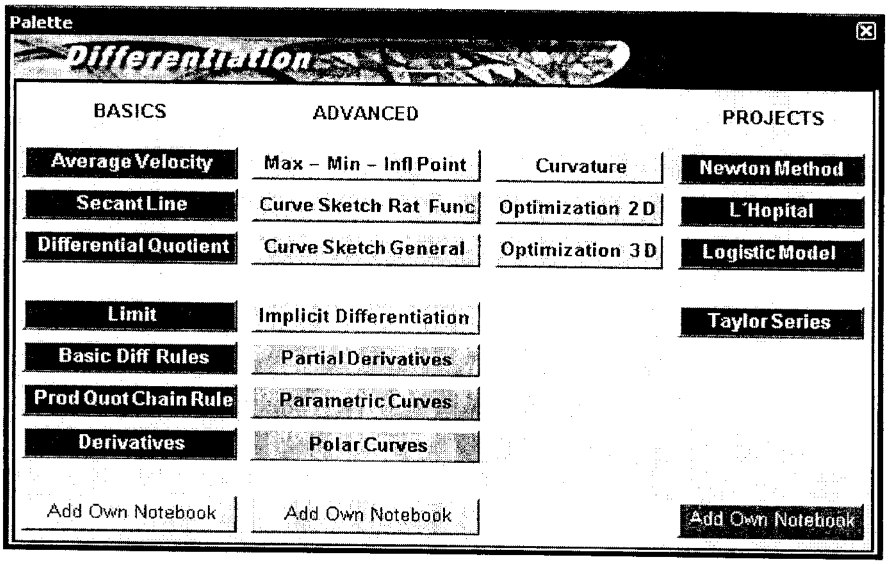

Abbildung 1: Differentiation Overview Palette

In Abbildung 1 kann man diese Einteilung für das Differenziationsmodul erkennen.

2.2 Die pädagogischen Aspekte von M@th Desktop

Neben didaktischen Gesichtspunkten müssen im Unterricht auch pädagogische Werte beachtet werden. Dies betont auch Rainer Fink in seiner Arbeit:
In einem wirksamen Unterricht müssen auch die Sozialformen des Unterrichts Beachtung finden. [finkdipl]
Beim Entwickeln der Paletten und Arbeitsblätter achteten wir darauf, folgende Aspekte zu fördern:

- **Selbstständigkeit:** Durch das Arbeiten am Computer, insbesondere durch experimentelles Arbeiten, werden die Schüler selbst aktiv. Rainer Fink hat das in seiner Diplomarbeit so formuliert:
  Durch das Arbeiten am Computer (vor allem durch experimentelle Mathematik) sind die Schüler gefordert, selbst aktiv zu sein. [finkdipl]
- **Partner- und Teamarbeit:** Am Computer ist es üblich, dass zu zweit - wie auch bei Reinhard Simonovits im Unterricht - oder in Gruppen, gearbeitet wird. So kann man Schüler zum gegenseitigen Wissensaustausch anregen und sie zum Zusammenarbeiten anhalten. Karl Fuchs schreibt in seiner Habilitationsschrift: [fuchshab]
  Das Bearbeiten von Unterrichtsprojekten wird in den Vordergrund treten. Diese Projekte werden verstärkt in Partner- und Gruppenarbeit sinnvollerweise zu bearbeiten sein, womit positive Einstellungen zu diesen Arbeitsformen beim Schüler geweckt werden können.
- **Kreativität:** Die Schüler werden dazu angehalten nach interessanten Ausnahmen und Grenzen des Lernstoffs zu suchen und setzen so ihre Kreativität ein. So zum Beispiel wie im Notebook des unbestimmten Integrals, wo schon gewisse Ausnahmefälle vorgeführt werden, kann man den Schüler dazu bewegen, weitere solche Funktionen zu suchen. Das ist mit dem Computer sehr schnell möglich und stellt kein allzu großes Problem dar. Rainer Fink schreibt zu diesem Punkt:
  Zum Beispiel könnte ein Auftrag an die Schüler sein, Funktionen zu finden, die an bestimmten Punkten nicht differenzierbar sind. (Das lässt sich mit dem Computer schnell feststellen.) Lernende suchen gerne nach interessanten Ausnahmen und Grenzen des momentanen Lehrstoffs und setzten dabei ihre Kreativität ein. [finkdipl]

2.3 Fundamentale Konzepte und Ideen im Differenziationsmodul

Wie vorher schon erwähnt, ist M@th Desktop nach fundamentalen Ideen und Konzepten designed worden. Im Differentiationsmodul kann man die Punkte eines Kataloges von Hans-Christian Reichel finden [reichel95], den auch Karl Fuchs aufgegriffen hat [fuchshab]:

- Betonung von Algorithmen
- Betonung von Modellbildungen
- Problemlösen durch Standpunktwechsel (verschiedene Beschreibungen gleichartiger Situationen)

- Algebraische-Numerische Äquivalenz (bewusster Umgang mit Näherungswerten mit Taschenrechner und Computer)
- Bewusstmachen von Lösungsstrategien und Methoden (Beschreiben des Arbeitsablaufes)

Weitere Punkte, die bei der Erstellung der Paletten und Arbeitsblätter beachtet wurden, sind das Experimentieren und das Begründen und Kontrollieren von Ergebnissen.
Durch das Experimentieren wird dem Schüler eine aktive Rolle zugewiesen und er bekommt ein Gefühl dafür wie er den Lernprozess selber steuern kann. Das Begründen und Kontrollieren der Ergebnisse ist am Computer unerlässlich, da der Schüler Aussagen, Ergebnisse und Vorgangsweisen erklären soll.
Außerdem erachte ich es für notwendig, die Theorie und einführende Beispiele vorher mit der "Hand" durchzuführen und danach erst am Computer zu rechnen. Der Computereinsatz wird erst dann sinnvoll, wenn die Grundlagen des jeweiligen Kapitels beherrscht werden und für die Schüler kein Problem mehr darstellen.
Bruno Buchberger [buchbe90] hat dieser Problemstellung einen ganzen Artikel gewidmet: **Should Students learn Integration Rules**: Der Artikel bezieht sich auf den Computereinsatz in der Integralrechnung. Buchberger ist, so wie auch Siller Hans-Stefan der Meinung, dass die Schüler zuerst die Grundlagen des jeweiligen Kapitels erlernen und beherrschen müssen, also sicher mit der "Hand" rechnen können, bevor sie am Computer zu arbeiten beginnen.
Für die Extremwertaufgaben heißt das, dass das Umsetzen der Angabe in ein mathematisches Modell mit Haupt- und Nebenbedingung im Vordergrund des Unterrichts steht. Das Differenzieren dient hier als "Hilfsmittel", das eigentliche Ziel, ein meist lokales Maximum oder Minimum zu bestimmen, zu erreichen. Der "Kern" der Extremwertaufgaben, dass Finden der Haupt- und Nebenbedingungen, also das Modellieren, wird dem Schüler vom Computer nicht abgenommen.
Die Erfahrung zeigt, dass es nicht sinnvoll ist diese Beispiele am Computer zu rechnen, wenn die Schüler das Differenzieren nicht ausreichend beherrschen.

3 Entwerfen einer Extremwertaufgabe anhand der fundamentalen Idee der Modellbildung

Ein sehr interessanter Bereich des Differenziationsmoduls, die Extremwertaufgaben, sind unter dem Gesichtspunkt der Modellbildung entwickelt worden.
Der Modellbildungsprozess gliedert sich in vier Schritte. Hans-Georg Weigand und Hubert Weller [weigand97] haben eine ähnliche Einteilung des Modellbildungsprozesses getroffen wie Humenberger [humenb94]:

- Idealisieren - Schaffen von Modellen
- Mathematisieren - Mathematisches Modellbilden
- Problemlösen - Erarbeiten einer Lösung
- Interpretieren - Validieren des Problems

3.1 Das Schwimmbojenbeispiel

Anhand eines ausgesuchten Beispiels, dem Schwimmbojenbeispiel, möchte ich die Punkte des Modellbildungsprozesses genauer erläutern:

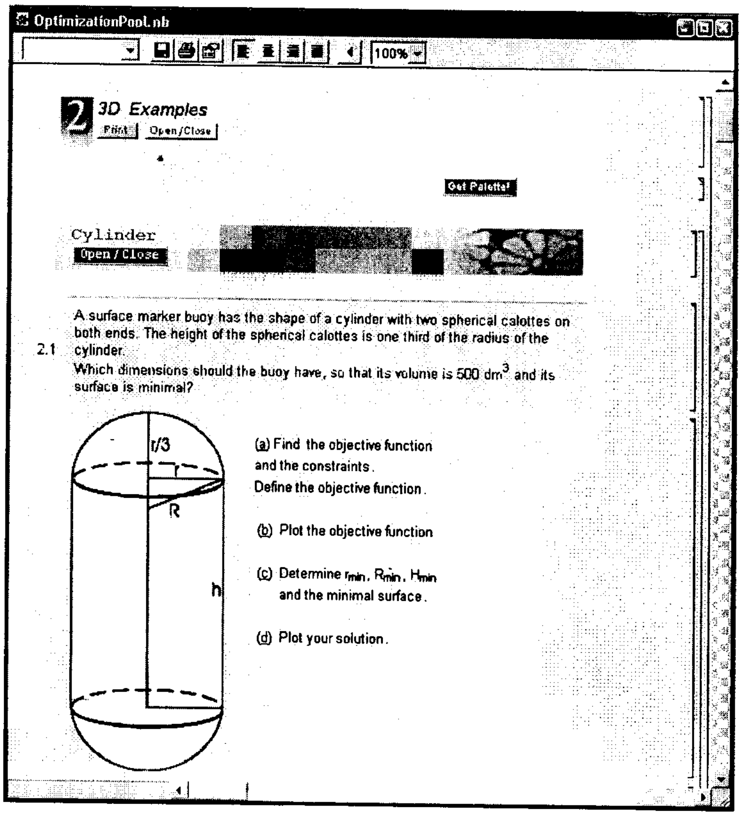

Abbildung 2: Die Aufgabenstellung des Schwimmbojenbeispiels im Arbeitsblatt

3.1.1 Idealisieren - Schaffen von Modellen

Der erste Schritt im Modellbildungsprozess ist das Schaffen von Modellen, das Idealisieren. Dieser Schritt wird dem Schüler bei allen Beispielen zu den Extremwertaufgaben sowohl in Lehrbüchern, als auch in M@th Desktop prinzipiell abgenommen, denn er muss sich nicht überlegen, wie er den Drehkörper wählen soll, um ein ansprechendes Ergebnis zu erhalten. Auch muss er sich nicht über die Gestalt der Boje Gedanken machen. Dies finde ich auch gut so, denn müsste sich der Schüler auch noch Gedanken um die geeigneten Abmessungen machen, würde diese Aufgabe einen Schwierigkeitsgrad erreichen, der für eine Schule nicht mehr zumutbar wäre.

Die idealisierte Gestalt wird in der Angabe schon beschrieben. In Wirklichkeit wird man kaum solch eine Schwimmboje sehen. J. Humenberger schreibt hierzu:

Selbst, wenn man Spezialist auf dem Gebiet, aus dem das Problem stammt, ist, ist es oft schwer wirklich alle Voraussetzungen, Bedingungen und Einflußgrößen eines Sachverhaltes oder Prozesses erschöpfend zu erfassen und diese einer mathematischen Betrachtungsweise zugänglich zu machen. [humenb94]

3.1.2 Mathematisieren - Mathematisches Modellbilden

Im zweiten Schritt des Modellbildungsprozesses beginnt das mathematische Modellbilden - das Mathematisieren. Im Sinne der Beispiele der Extremwertaufgaben heißt das, der Schüler überlegt sich die Problemstellung anhand einer Skizze und beginnt Zusammenhänge zwischen auftretenden Größen herzustellen. Auch ist dies der Schritt, wo sich der Schüler erst einmal überlegen muss, welche gewünschte Eigenschaft minimal oder maximal werden soll.

In unserem Beispiel ist es die Oberfläche, die minimal werden soll. Hat der Schüler die Hauptbedingung gefunden, so sieht er, dass er nicht in der Lage ist sofort mit Erarbeiten einer Lösung zu beginnen, denn die gefundene Funktion ist eine Funktion in drei Unbekannten. Also muss er noch ein wenig beim zweiten Schritt, dem Mathematisieren, verweilen und sich überlegen, wie es möglich ist, diese Hauptbedingung in eine Funktion in einer Unbekannten umzuschreiben. Dabei wird er bei genauer Studie der Skizze auf die beiden Nebenbedingungen stossen. Dabei ist eine Nebenbedingung praktisch aus der Angabe herauslesbar, denn diese wird durch die Oberfläche bestimmt; die andere wird durch das rechtwinkelige Dreieck, das man in der Skizze unschwer erkennen kann, festgelegt. Hat der Schüler die Hauptbedingung und alle Nebenbedingungen gefunden, kann er zum dritten Schritt des Modellbildungsprozesses, dem Erarbeiten einer Lösung, übergehen. Um den zweiten Schritt, das Mathematisieren des Problems, für den Schüler einfacher zu gestalten, habe ich zu jedem Beispiel eine Skizze gezeichnet. Dies sollte dem Schüler ermöglichen, nach dem Mathematisieren des Problems, das Beispiel sowohl händisch als auch am Computer zu lösen.

3.1.3 Problemlösen - Erarbeiten einer Lösung

Im dritten Schritt, dem Erarbeiten einer Lösung, kann der Schüler sein erlerntes Wissen über das Differenzieren und Maximum/Minimum Aufgaben bei der Berechnung von Extremwerten einsetzen. M@th Desktop leistet hier sehr gute Hilfe, da es dem Schüler die Arbeit des Differenzieren nahezu vollständig abnimmt. Dieser muß sich nur überlegen, dass er die erste Ableitung null setzen muss und wie er dann durch die zweite Ableitung zum Maximum oder Minimum kommt. Humenberger schreibt dazu:

Das benötigte rechentechnische Können sollte als eine Art "Vorwissen" bereit liegen und auch abruf- bzw. einsetzbar sein. [...] Die elementaren mathematischen Verfahren sollten in einer "Vorratskammer" gut konserviert sein und auf Wunsch gute Dienste leisten. [humenb94]

3.1.4 Interpretieren -Validieren des Problems

Im vierten Schritt des Modellbildungsprozesses, der Interpretation, sollte der Schüler sich nun überlegen, ob die Lösung die er gefunden hat, sinnvoll ist oder nicht. Er sollte sich auch überlegen, welche Auswirkungen das auf die Skizze hat. Verändert sich die so dargestellte Boje vielleicht in eine andere Gestalt, etwa in eine Kugel? Humenberger hat dies treffend formuliert:

Dies soll nicht nur "Draufgabe" für Pedanten und Interpretationsfanatiker sein, sondern i.a. einen wesentlichen Bestandteil des Problemlöseprozesses darstellen! [humenb94]

Bei den Extremwertaufgaben ist es unerläßlich sich ein Bild von dem gerade Berechneten zu machen, denn es könnten ja auch noch andere Lösungen in Frage kommen, oder überhaupt andere Extremfälle auftauchen, so wie es in der Diplomarbeit von Siller Hans-Stefan [siller02] genau vorgeführt ist.

3.2 Die Palette und das Arbeitsblatt der Extremwertaufgaben

Das Arbeitsblatt und die Palette der Optimization 2D Aufgaben haben folgendes Aussehen:

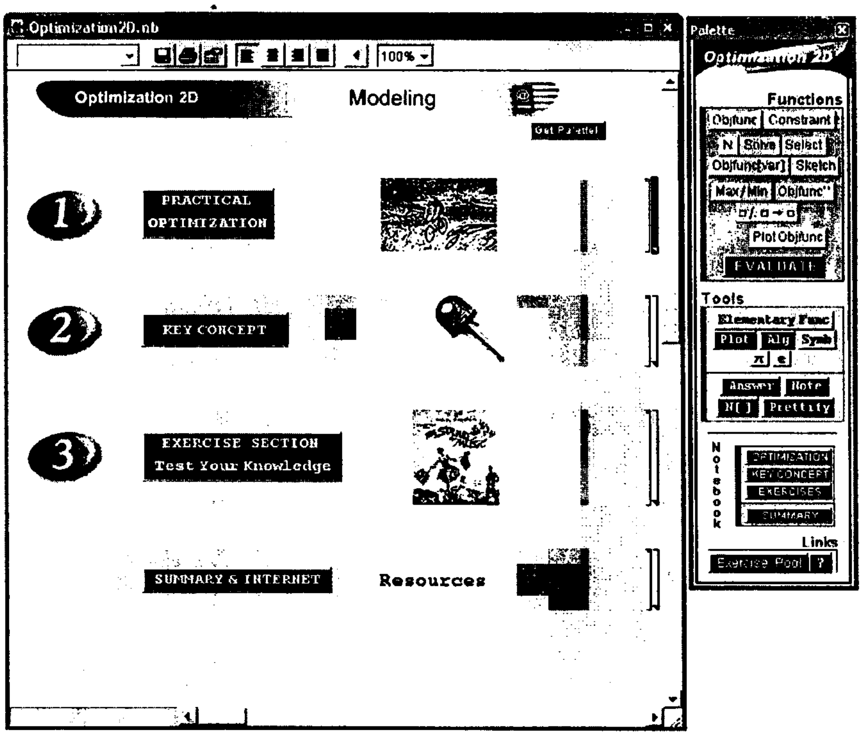

Abbildung 3: Arbeitsblatt und Palette Optimization 2D

Jedes Arbeitsblatt in M@th Desktop beinhaltet Movies, Definitionen, Muster- und Übungsbeispiele, eine Zusammenfassung und Internetlinks. Im **Arbeitsblatt der Extremwertaufgaben** gibt es drei Kapitel:

Im ersten Kapitel befinden sich Musterbeispiele zu den Nebenbedingungen Phytagoras, Strahlensatz, keine oder beliebige Nebenbedingung.

Im zweiten Kapitel findet man eine mögliche Vorgehensweise für Extremwertaufgaben und das dritte Kapitel enthält Beispiele, die es zu lösen gilt.

Der Aufbau aller Paletten im Differenziationsmodul ist nahezu ident. Jener Teil, der sich von Palette zu Palette ändert ist der Functions-Teil.

Im oberen Teil der Palette sieht man den **Functions-Teil**, der die wichtigen Funktionen für das jeweilige Kapitel enthält. In der Mitte findet man den **Tools-Teil**, in dem man häufig verwendete Symbole oder Buttons finden kann. Danach kommt noch der **Notebook-Teil**. Dort kann man mit dem jeweiligen zum entsprechenden Kapitel des Arbeitsblattes kommen. Zu guter letzt finden sich noch ein Button der den **Exercise Pool** und die **Hilfe** aufruft.

Jedes Arbeitsblatt in M@th Desktop beinhaltet Movies, Definitionen, Muster und Übungsbeispiele, eine Zusammenfassung und Internetlinks. Im ersten Kapitel findet man immer ein **Motivationsbeispiel**. Danach folgt ein Kapitel für die **Definition** oder wie bei den Extremwertaufgaben ein Konzept, dass das Vorgehen erleichtern soll. Im dritten Kapitel gibt es **Musterbeispiele**, im vierten Kapitel **Übungsbeispiele**. Im letzten Abschnitt des Arbeitsblatt

findet man noch eine Zusammenfassung und einen Internetlink.

Die Einteilung der Extremwertaufgaben erfolgte nach geometrischen Gesichtspunkten. Beispiele in der Ebene findet man in Optimization 2D Arbeitsblatt, Körperbeispiele im Optimization 3D Arbeitsblatt.

Das Berechnen einer Extremwertaufgabe kann man im wesentlichen in sechs Schritte einteilen:

- Aufstellen der Hauptbedingung in mehreren Variablen, d.h. eine **Funktion** in mehreren Variablen mit dem Objfunc definieren
- eine oder mehrere Nebenbedingungen, i.a. in Form von **Gleichungen**, mit Constraint finden
- eine Variable durch andere ausdrücken, um eine **Funktion** in einer Unbekannten zu erhalten, mit N, Solve, Select und Objfunc[var]
- die Funktionen zeichnen, mit Sketch
- erste und zweite Ableitung ausrechnen, mit Max/Min und Objfunc''
- Maximum bzw. Minimum visualisieren und die anderen Größen berechnen, mit PlotObjfunc und □/. □ → □

Der Functions-Teil der Palette hilft den Schülern, diese sechs Schritte leichter zu bewältigen. Das Denken nimmt die Palette den Schülern nicht ab.

In der Palette hat der Functions-Teil folgendes Aussehen:

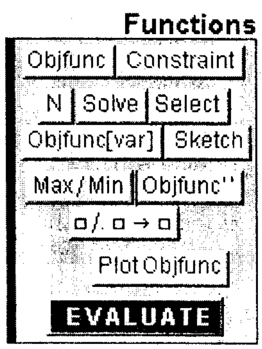

Abbildung 4: Der Functions-Teil der Extremwertaufgaben in M@th Desktop

3.3 Handhabung der Palette und des Arbeitsblattes für Extremwertaufgaben im Unterricht

Die Schüler müssen, um die Beispiele der Extremwertaufgaben am Computer lösen zu können, gewisse Fertigkeiten besitzen. Die im folgenden aufgezählten Punkte, sollten es für den Lehrer einfacher machen, die Ziele und den Zeitaufwand genauer zu definieren.

1. **Lehrplanbezug**: Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben.
2. **Kenntnisse der Schüler vor dem Einsatz am Computer**:
   Differenzieren: Um das Gelingen der Extremwertaufgaben am PC zu garantieren, müssen die Schüler die Differentiationstechniken beherrschen. Besonderes Augenmerk ist auf das Ableiten mit Buchstaben zu legen.
   Aufstellen der Haupt- und Nebenbedingung: Damit ein zügiges Arbeiten am Computer gewährleistet ist, sollten die Schüler einige Beispiele mit der "Hand" durchgerechnet haben. Finden der Haupt- und Nebenbedingung sollen dem Schüler geläufig sein. Das Anwenden des Satz von Pythagoras, des Strahlensatzes und die trigonometrischen Funktionen sind schon geübt worden.
3. **Didaktisches Ziel der Palette und des Arbeitsblattes**: Die Palette und das Arbeitsblatt Optimization 2D und Optimization 3D unterstützen den Lehrer beim Kapitel der Extremwertaufgaben.
   Die Palette enthält Buttons zum Aufstellen der Hauptbedingung, der Nebenbedingungen, zum Lösen einer Gleichung nach einer Variablen, zum Auswählen einer Lösung, zum Veranschaulichen von Funktionen, zum Veranschaulichen der Lösung und zum Rückeinsetzen in verwendete Funktionen.
   Das Arbeitsblatt enthält Musterbeispiele, z.B. "The Smart Mountainbiker", "Making a Newspaper" im Optimization 2D Arbeitsblatt oder "Designing a Coke can", "Constructing a tunnel" im Optimization 3D Arbeitsblatt, und Übungsbeispiele.
   Das Aufstellen der Haupt- und Nebenbedingung wird den Schülern nicht abgenommen!
   Palette und Arbeitsblatt helfen dem Schüler die zu maximierende und minimierende Funktion rasch zu visualisieren. Durch den Einsatz des Computers wird dem Schüler das Differenzieren, welches nicht Schwerpunkt dieses Kapitels ist und oft ein Lösen der Aufgabe durch fehlerhaftes Differenzieren verhindert, abgenommen.
4. **Zeitaufwand**: Für den Einsatz der beiden Paletten und Arbeitsblätter der Extremwertaufgaben, Optimization 2D und Optimization 3D, soll der Lehrer mindestens jeweils vier Stunden einplanen.

Literatur

[aspet95] Aspetsberger, Klaus; Fuchs, Karl: Derive im Mathematikunterricht: Zur Organisation von Beobachtungseinheiten; Modultechnik im Mathematikunterricht mit Computeralgebra. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 74-77

[blumki79a] Blum, Werner; Kirsch, Arnold: Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. In: Der Mathematikunterricht 3 (1979), S. 6-24

[buchbe90] Buchberger, Bruno: Should Students learn Integration Rules? In: SIGSAM Bulletin Vol.24/1, S. 10-17, 1990

[buchbe92] Buchberger, Bruno: Teaching Math by Math Software: Newton's Method as an Example of the White-Box/Black-Box Principle. Manuscript, Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, 1992.

[finkdipl] Fink, Rainer: Auf Mathematica basierende Entwicklung von Lerneinheiten mit M@th Desktop auf dem Gebiet der Differentialrechnung, Diplomarbeit, Graz, 2001

[fuchshab] Fuchs, Karl Josef: Computeralgebra - Neue Perspektiven im Mathematikunterricht. Habilitationsschrift an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg zur Erlangung der Venia Docendi aus Didaktik der Mathematik

[fuehrer91] Führer, Lutz: Pädagogik des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1991

[heugl96] Heugl, H.; Klinger, W.; Lechner, J.: Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen. Addison-Wesley, Bonn, Massachusetts 1996

[humenb94] Humenberger, Johann; Reichel, Hans-Christian: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Wiss.-Verl., Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich, 1995

[reichel95] Reichel, Hans-Christian: Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. Wissenschaftliche Nachrichten (1995), S. 20-25

[siller02] Siller, Hans-Stefan: Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit M@th Desktop. Diplomarbeit, Graz, 2002

[simonovi] Simonovits, Reinhard: Project M@th Desktop. Österreichische Mathematische Gesellschaft, Heft 32, Dezember 2000, S. 172

[tietze97] Tietze, U.; Klika, M.; Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1997

[weigand97] Weigand, Hans-Georg; Weller, Hubert: Das Lösen realitätsorientierter Aufgaben zu periodischen Vorgängen mit Computeralgebra. In: ZDM Heft 5, 1997, S. 162-169